Maximales Volumen

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Einführung

Bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung benötigst du eine Zielfunktion, die du minimieren bzw. maximieren kannst.

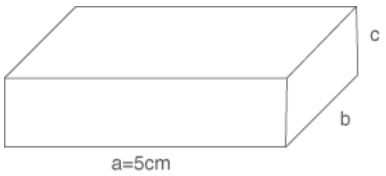
Gehe folgendermaßen vor:

- Fertige eine **Skizze** an.
- Suche die **Größe**, die **minimal** bzw. **maximal** werden soll. Das ist hier das Volumen, schreibe die geometrische Formel des Volumens auf.
- Stelle die **Nebenbedingung** auf. Überlege dir wie die Variablen der gesuchten Größe zusammenhängen. Hier kann die Nebenbedingung beispielsweise der Umfang bzw. der Flächeninhalt der Grundfläche oder die Oberfläche des Körpers sein.
- Bilde nun die **Zielfunktion**, indem du die Nebenbedingung nach einer der Variablen auflöst und in den Term für die extremale Größe einsetzt. Vereinfache diesen Term so weit wie möglich und bestimme den Definitionsbereich der Zielfunktion.
- Bestimme die **absoluten Extremstellen** der Zielfunktion. Vergiss dabei nicht, zu überprüfen, ob diese Kandidaten auch relative Extremstellen sind.
- Stelle nun die Verbindung zur Aufgabenstellung her, indem du die zweite Variable und den Extremwert berechnest.

Beispiel mit Lösungsskizze

Eine Schmuckdose soll eine Länge von 5 cm und ein Volumen von 25 cm^3 haben. Wie müssen die anderen beiden Seiten gewählt werden, damit für die Herstellung am wenigsten Material benötigt wird.

- **Skizze**



- **Größe**, die **minimal** werden soll:

$$O=2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot a\cdot c=10\cdot b+2\cdot b\cdot c+10\cdot c$$

- **Nebenbedingung**:

$$V=25\text{ cm}^3=5\cdot b\cdot c \quad\Rightarrow\quad b=\frac{5}{c}$$

- **Zielfunktion**:

$$O(c)=10\cdot\frac{5}{c}+2\cdot\frac{5}{c}\cdot c+10\cdot c=\frac{50}{c}+10c+10 \text{ mit Definitionsbereich } \mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$$

- **Extremstellen** der Zielfunktion:

$$O(c)=\frac{50}{c}+10c+10$$

$$O'(c)=-\frac{50}{c^2}+10$$

$$O''(c)=\frac{100}{c^3}$$

$$\begin{aligned} O'(c) &= 0 \\ 0 &= -\frac{50}{c^2}+10 \\ c &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Für diese Aufgabe ist nur $c=\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$ interessant, da die andere Lösung nicht im Definitionsbereich liegt.

$O''(\sqrt{5})=\frac{4}{\sqrt{5}}>0$ es handelt sich also um ein Minimum.

Der minimale Wert ist somit: $O(\sqrt{5})=54,7\ \mathrm{cm}^2$

- Für die Seite b gilt dann: $b=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$.

  Die minimale Oberfläche ist somit $54,7\ \mathrm{cm}^2$ groß.